

Die Erhaltungsgrößen der klassischen Feldmechanik

Von LUDWIG WALDMANN

Aus dem Max-Planck-Institut für Chemie, Mainz

(Z. Naturforschg. 8a, 417—428 [1953]; eingegangen am 29. April 1953)

Die Erhaltungsgrößen eines Teilchens, dessen Weltlinie durch das klassische Bopp-Feynmansche Wirkungsprinzip determiniert ist, werden durch vorübergehende Einführung einer Lagrange-Funktion und deren kanonischer Impulse gewonnen. Es zeigt sich, daß letztere durch einfach gebaute Integralausdrücke dargestellt werden können [Gln. (16)–(18)]. — Bei Abwesenheit eines äußeren Felds genügt die Bewegung des Teilchens mit konstanter Umlaufgeschwindigkeit $c\beta$ auf einem Kreis von geeignetem Radius a (β) der feldmechanischen Bewegungsgleichung [Gl. (24)]. Ruhmasse und Spin lassen sich aus der allgemeinen Integraldarstellung ermitteln [Gln. (29) und (35)]. Auch das von dem Teilchen erzeugte Feld wird berechnet. — Für eine spezielle, rechteckige Strukturfunktion ist die Auswertung einfach. Schreibt man dem Teilchen auch nichtelektromagnetische Masse zu, so kann man die verfügbaren Konstanten so einrichten, daß für eine bestimmte Kreisbahn mit nichtverschwindendem Spin die Energie ein Minimum hat. Trotzdem bleibt es fraglich, ob man so zu „klassischen Elementarteilchen“ gelangt, die im Grundzustand einen Spin besitzen.

Die bisherigen Arbeiten über die klassische Feldmechanik¹ haben, was die Anwendungen betrifft, insofern Näherungscharakter, als nur wenige zusätzliche Freiheitsgrade der Partikel betrachtet werden. Demgegenüber befaßt sich diese Arbeit mit der Feldmechanik in der allgemeinen Integralform, wie sie direkt aus dem Bopp-Feynmanschen Fernwirkungsprinzip hervorgeht. Dieses Prinzip determiniert die Weltlinien der Teilchen und damit ist grundsätzlich alles Wissenswerte gegeben. Seine Invarianzeigenschaften haben aber Erhaltungssätze zur Folge und ermöglichen die Einführung der Erhaltungsgrößen Impuls, Energie und Momententensor. Die Frage, wie diese Größen für ein Teilchen aus dessen Weltlinie zu berechnen sind, soll untersucht und am Beispiel der Kreisbewegung illustriert werden.

Die Betrachtungen von Teil III, die für eine spezielle Strukturfunktion gelten, gehen stärker auf Einzelheiten ein. Doch sind die Ergebnisse über den Einfluß der nichtelektromagnetischen Masse wohl so typisch, daß ihre Mitteilung gestattet sein mag.

I. Zur allgemeinen Theorie

§ 1. Die Grundgleichungen der Feldmechanik

Die klassische Feldmechanik faßt ihre „Elementarteilchen“ als wandernde Punkte auf. Ein Teilchen werde herausgegriffen und durch seine Weltlinie $x_\mu(\lambda)$ beschrieben ($\mu = 1, \dots, 4$). Dabei ist $x_4 = ict$ ($t = \text{Zeit}$). Der Parameter λ sei so gewählt,

daß $t = \pm \infty$ für $\lambda = \pm \infty$. Der Einfluß aller übrigen Teilchen, der Umgebung, auf das herausgegriffene wird durch die Wirkung des in Raum und Zeit vorgegebenen, äußeren Felds erfaßt. Dieses Feld soll sich aus dem Viererpotential $A_\mu^{(a)}(x)$ ableiten. Die Rückwirkung des herausgegriffenen Teilchens auf die Umgebung wird vernachlässigt.

Zur Festlegung der Weltlinie postulieren Bopp und Feynman das folgende Prinzip der kleinsten Wirkung:

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} \left(L_0 + \frac{e}{c} A_\mu^{(a)} x_\mu'(\lambda) \right) d\lambda = \text{Min.}, \quad (1)$$

wobei

$$L_0 = -Mc \left[-x_\mu'(\lambda) x_\mu'(\lambda) \right]^{1/2} + \frac{e^2}{2c} \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma) x_\mu'(\lambda) x_\mu'(\lambda + A) dA. \quad (2)$$

Dabei bedeutet M die nichtelektromagnetische Masse. Zur Abkürzung ist $x' = dx/d\lambda$ und

$$\sigma = - \sum_\nu \left[x_\nu(\lambda) - x_\nu(\lambda + A) \right]^2 \quad (3)$$

gesetzt. Die Strukturfunktion $f(\sigma)$ ist der Normierungsbedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma) d\sigma = 1 \quad (4)$$

¹ Wegen der Literatur sei auf die Zusammenfassung verwiesen, H. Hönl, *Ergebn. exakt. Naturwiss.* **26**, 291 [1952].

² L. Waldmann, *Z. Naturforschg.* **7a**, 645 [1952].



zu unterwerfen. Die Variation in (1) soll so geschehen, daß $\delta x_\mu = 0$ ist für zwei feste Werte λ_1, λ_2 , wobei dann $\lambda_1 \rightarrow \infty, \lambda_2 \rightarrow -\infty$ gehen sollen. Etwas ausführlicher ist die Entstehung von (1) z. B. auch in² dargestellt.

Die nichtelektromagnetische Masse empfindet man in der Feldmechanik als Fremdkörper. Wir setzen aber ihre Existenz voraus, einmal der größeren Allgemeinheit wegen und zum anderen, weil sie sich in Teil III als wesentlich erweisen wird.

Zur expliziten Formulierung der Extremalforderung (1) definieren wir das Viererpotential des Eigenfelds des Teilchens durch

$$A_\mu^{(e)} = e \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma) x_\mu'(\lambda + A) dA. \quad (5)$$

Das Eigenfeld selbst sei auf der Weltlinie durch

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^{(e)} &= \partial A_\nu^{(e)} / \partial x_\mu - \partial A_\mu^{(e)} / \partial x_\nu \\ &= 2e \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{d\sigma} [(x_\nu(\lambda) - x_\nu(\lambda + A)) x_\mu'(\lambda + A) \\ &\quad - (x_\mu(\lambda) - x_\mu(\lambda + A)) x_\nu'(\lambda + A)] dA \end{aligned} \quad (6)$$

gegeben. Als äußeres Feld bezeichnen wir entsprechend

$$F_{\mu\nu}^{(a)} = \partial A_\nu^{(a)} / \partial x_\mu - \partial A_\mu^{(a)} / \partial x_\nu. \quad (6')$$

Diese Definitionen sind deshalb angebracht, weil, wie man leicht sieht und in¹ ausgeführt ist, (1) nun gleichbedeutend ist mit

$$\frac{d}{d\lambda} \left[Mc (-x_\nu' x_\nu')^{-1/2} x_\mu' \right] = \frac{e}{c} F_{\mu\nu} x_\nu'. \quad (7)$$

Dabei bedeutet

$$F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^{(a)} + F_{\mu\nu}^{(e)} \quad (6'')$$

das auf das Teilchen wirkende Gesamtfeld. Die Bewegungsgleichung (7) hat wegen (6) den Charakter einer Integralgleichung. — Von Ausstrahlungsvorgängen sei nicht die Rede.

§ 2. Einführung kanonischer Impulse

Wie diese einzuführen sind, ist z. B. aus² zu sehen. Wir können uns hier kurz fassen. Wir setzen die Entwicklungen

$$\begin{aligned} \sigma &= - \sum \left(x_\nu'(\lambda) A + x_\nu''(\lambda) \frac{A^2}{2!} + \dots \right)^2, \\ x_\mu'(\lambda + A) &= x_\mu'(\lambda) + x_\mu''(\lambda) A + \dots \end{aligned} \quad (3')$$

in (2) ein und erhalten für die Lagrange-Funktion im feldfreien Raum einen Ausdruck von der Form $L_0 = L_0(x', x'', \dots)$. Wir bezeichnen die zu den „Koordinaten“ x, x', x'', \dots kanonisch konjugierten Impulse mit p, s, t, \dots und benutzen die Abkürzung

$$P_\mu = p_\mu - \frac{e}{c} A_\mu^{(a)}. \quad (8)$$

Dann hat man, vgl. Gl. (9) in²,

$$P_\mu = \frac{\partial L_0}{\partial x_\mu'} - \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L_0}{\partial x_\mu''} + \dots, \quad (9)$$

$$S_\mu = \frac{\partial L_0}{\partial x_\mu''} - \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L_0}{\partial x_\mu'''} + \dots \text{ usw.} \quad (10)$$

Die zu den x_μ konjugierten Größen p_μ stellen den Translationsimpuls dar oder den Impuls schlechthin und (in der 4. Komponente) die Energie. Als Drehimpulstensor des Teilchens ist der Ausdruck anzusprechen, vgl. Gl. (11) und (12) in²,

$$M_{kl} = x_k p_l - x_l p_k + S_{kl}, \quad (11),$$

wobei

$$S_{kl} = x_k' s_l - x_l' s_k + x_k'' t_l - x_l'' t_k + \dots \quad (12)$$

den „Spin“ des Teilchens bedeutet.

§ 3. Integraldarstellung der kanonischen Impulse

Die Darstellung der kanonischen Impulse durch die Reihen (9), (10) usw. erscheint dem Wesen der Integralgleichungstheorie nicht angemessen. Um zu einer übersichtlichen Integraldarstellung zu gelangen, setzen wir die Entwicklungen (3') in (2) ein. Dann finden wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_0}{\partial x_\mu'} &= Mc (-x_\nu' x_\nu')^{-1/2} x_\mu' + \frac{e}{2c} A_\mu^{(e)} + \int_{-\infty}^{\infty} g_\mu(\lambda, A) A dA, \\ \frac{\partial L_0}{\partial x_\mu''} &= \int_{-\infty}^{\infty} g_\mu(\lambda, A) \frac{A^2}{2!} dA, \text{ usw.} \end{aligned} \quad (13)$$

Dabei wurde einmal partiell integriert und $f(\infty) = 0$ benutzt. Ferner haben wir die Abkürzung (5) gebraucht und die Hilfsgröße eingeführt

$$g_\mu(\lambda, A) = \frac{e^2}{c} \frac{df}{d\sigma} [(x_\mu(\lambda) - x_\mu(\lambda + A)) x_\nu'(\lambda) - (x_\nu(\lambda) - x_\nu(\lambda + A)) x_\mu'(\lambda)] x_\nu'(\lambda + A). \quad (14)$$

Wir führen weitere Hilfsgrößen ein durch

$$g_\mu(\lambda, A) = \frac{\partial g_\mu^{(I)}}{\partial \lambda} = \frac{\partial^2 g_\mu^{(II)}}{\partial \lambda^2} = \dots \quad (15)$$

und ersehen aus (9) und (13) nun sofort

$$\begin{aligned} P_\mu - Mc(-x_\nu' x_\nu')^{-1/2} x_\mu' - \frac{e}{2c} A_\mu^{(e)} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[g_\mu(\lambda, A) A - \frac{\partial g_\mu}{\partial \lambda} \frac{A^2}{2!} + \dots \right] dA \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [g_\mu^{(I)}(\lambda, A) - g_\mu^{(I)}(\lambda - A, A)] dA \end{aligned}$$

oder

$$P_\mu = Mc(-x_\nu' x_\nu')^{-1/2} x_\mu' + \frac{e}{2c} A_\mu^{(e)} + \int_{-\infty}^{\infty} dA \int_{\lambda-A}^{\lambda} g_\mu(\lambda_1, A) d\lambda_1. \quad (16)$$

Somit wird P_μ durch eine zweimalige Integration längs der Weltlinie erhalten. Setzen wir (14) in (16) ein, so kommt nach kurzer Umformung

$$P_\mu = Mc(-x_\nu' x_\nu')^{-1/2} x_\mu' + \frac{e}{c} A_\mu^{(e)} + \frac{e^2}{c} \int_{-\infty}^{\infty} dA \int_{\lambda-A}^{\lambda} \frac{df}{d\sigma} [x_\mu(\lambda_1) - x_\mu(\lambda_1 + A)] x_\nu'(\lambda_1) x_\nu'(\lambda_1 + A) d\lambda_1. \quad (16')$$

Setzt man nun darin noch $\lambda_1 + A = \lambda_2$, so wird auch

$$P_\mu = Mc(-x_\nu' x_\nu')^{-1/2} x_\mu' + \frac{e}{c} A_\mu^{(e)} + \frac{2e^2}{c} \int_{-\infty}^{\lambda} dx_\nu(2) \int_{\lambda}^{\infty} \frac{df}{d\sigma} [x_\mu(1) - x_\mu(2)] dx_\nu(1). \quad (16'')$$

In dieser Form findet sich die Integraldarstellung des Impuls-Energie-Vektors schon bei Feynman³. Es ist ersichtlich, daß p_μ parameterinvariant ist.

Wir erhalten nun aber nach der hier benutzten Methode sofort auch die höheren Impulse. Nach (10) und (13) ist

$$\begin{aligned} s_\mu &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[g_\mu(\lambda, A) \frac{A^2}{2!} - \frac{\partial g_\mu}{\partial \lambda} \frac{A^3}{3!} + \dots \right] dA \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} [g_\mu^{(II)}(\lambda, A) - g_\mu^{(II)}(\lambda - A, A) - g_\mu^{(I)}(\lambda, A) \cdot A] dA \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} dA \int_{\lambda-A}^{\lambda} [g_\mu^{(I)}(\lambda_1, A) - g_\mu^{(I)}(\lambda, A)] d\lambda_1 \end{aligned}$$

oder

$$s_\mu = - \int_{-\infty}^{\infty} dA \int_{\lambda-A}^{\lambda} d\lambda_1 \int_{\lambda}^{\lambda_1} g_\mu(\lambda_2, A) d\lambda_2. \quad (17)$$

Analog ergibt sich

$$t_\mu = \int_{-\infty}^{\infty} dA \int_{\lambda-A}^{\lambda} d\lambda_1 \int_{\lambda}^{\lambda_1} d\lambda_2 \int_{\lambda}^{\lambda_2} g_\mu(\lambda_3, A) d\lambda_3 \text{ usw.} \quad (18)$$

Damit tritt das Bildungsgesetz der Integraldarstellungen klar zutage.

Nach (11) besitzen wir jetzt auch eine Darstellung des Drehimpulses (bzw. des Spins) durch eine einfache Reihe, deren Glieder Integrale steigender Ordnung sind. Am Beispiel der Kreisbewegung wird in § 6 gezeigt, daß diese Reihe konvergiert.

II. Spezialisierung auf Kreisbewegung ohne äußeres Kraftfeld

§ 4. Die Gleichgewichtsbedingung für die Eigenkraft

Wir sehen jetzt von äußeren Kraftfeldern ab und nehmen an, daß das Teilchen mit konstanter Geschwindigkeit einen Kreis durchläuft. Es wird am Schluß dieses § gezeigt, daß bei richtiger Wahl des Bahnradius die Bewegungsgleichung (7) tatsächlich zu jeder Zeit erfüllt ist. Außerdem ergibt sich im nächsten §, daß der Impuls ($p_{1,2,3}$) des Teilchens verschwindet (was ohnehin aus Isotropiegründen klar ist). Mit Hönl sprechen wir also von

³ R. P. Feynman, Physic. Rev. **74**, 939 [1948].

einem makroskopisch ruhenden Teilchen, das eine kreisförmige Mikrobewegung ausführt.

Zunächst werde der Zusammenhang zwischen Bahngeschwindigkeit und -radius dadurch bestimmt, daß wir direkt das Minimum des Wirkungsintegrals (1) aufsuchen, welches für die Kreisbewegung leicht zu berechnen ist.

Die Weltlinie sei durch

$$x_1 = a \cos \lambda, x_2 = a \sin \lambda, x_3 = 0, x_4 = i c t = \frac{ic}{\omega} \lambda \quad (19)$$

dargestellt (a = Bahnradius, ω = Frequenz). Mit den Abkürzungen

$$\beta = \frac{a\omega}{c}; \quad \sigma' = \frac{d\sigma}{d\lambda} \text{ usw.} \quad (20)$$

wird, vgl. (3),

$$\begin{aligned} \sigma &= \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 [A^2 - 2\beta^2 (1 - \cos A)], \\ [x_\nu(\lambda) - x_\nu(\lambda + A)] x_\nu'(\lambda + A) &= \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 (A - \beta^2 \sin A) = \frac{\sigma'}{2}, \\ x_\mu'(\lambda) x_\mu'(\lambda + A) &= -\left(\frac{c}{\omega}\right)^2 (1 - \beta^2 \cos A) = -\frac{\sigma''}{2}, \\ (-x_\mu'(\lambda) x_\mu'(\lambda))^{\frac{1}{2}} &= \frac{c}{\omega} \sqrt{1 - \beta^2}. \end{aligned} \quad (21)$$

Dies in (2) eingesetzt, liefert

$$L_0 = -\frac{Mc^2}{\omega} \sqrt{1 - \beta^2} - \frac{e^2}{4c} \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma) \sigma'' d\lambda, \quad (22)$$

also einen von λ unabhängigen, d. h. zeitlich konstanten Wert. Wir gehen gemäß (1) zu W über, indem wir über N ganze Perioden integrieren:

$$W = \int_{-N\pi}^{N\pi} L_0 d\lambda = 2\pi N L_0.$$

W soll extrem sein für alle erlaubten Vergleichsbahnen, das sind solche mit $\delta x_\mu = 0$ für $\lambda = \pm N\pi$. Eine erlaubte Vergleichsbahn ist also ein mit gleicher Frequenz ebenfalls N mal durchlaufener Kreis vom Radius $a + \delta a$, welcher den Kreis (19) in einem Punkt berührt. Wegen der Translationsinvarianz von L_0 können die Kreise aber auch konzentrisch gedacht werden und aus der Forderung $W = \text{Extremwert}$ ergibt sich somit die notwendige Bedingung

$$\left(\frac{\partial L_0}{\partial a}\right)_\omega = 0. \quad (23)$$

Nach (22) und (21) lautet dies ausführlich

$$\frac{Mc\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \frac{e^2 a}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \left[f(\sigma) \cos A + \frac{df}{d\sigma} (1 - \cos A) \sigma' \right] dA = 0. \quad (24)$$

Durch partielle Integration ergibt sich, wegen $f(\infty) = 0$ und da der Integrand gerade in A ist, auch

$$\beta \left\{ \frac{M}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \frac{2e^2 a}{c^2 \beta} \int_0^\infty f(\sigma) \left[\cos A - \frac{d}{dA} \frac{(1 - \cos A) \sigma''}{\sigma'} \right] dA \right\} = 0. \quad (24')$$

(24) oder (24') können wir als *mechanische Gleichgewichtsbedingung* der Eigenkraft des Teilchens bezeichnen. Durch sie ist $a = a(\beta)$ festgelegt, wenn $f(\sigma)$ bekannt ist.

Die Bedingung (24) ist aber auch hinreichend: die Bewegungsgl. (7) ist erfüllt. Für die Kreisbahn (19) ergibt sich nämlich aus (6) für das magnetische Eigenfeld $H_1^{(e)} = H_2^{(e)} = 0$ und

$$H_3^{(e)} = F_{12}^{(e)} = 2a^2 e \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{d\sigma} (1 - \cos A) dA. \quad (25)$$

Für das elektrische Eigenfeld folgt $E_3^{(e)} = 0$ und

$$\begin{aligned} E_{(2)}^{(e)} &= i F_{(14)}^{(e)} = 2 \frac{ace}{\omega} \left(\frac{\cos \lambda}{\sin \lambda} \right) \\ &\cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{d\sigma} (1 - \cos A - A \sin A) dA. \end{aligned} \quad (26)$$

Die Bewegungsgleichung (7) lautet vektoriell

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{M\omega}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{d\mathbf{r}}{d\lambda} \right) &= -\frac{M\omega}{\sqrt{1 - \beta^2}} \mathbf{r} = \frac{e}{\omega} \left(\mathfrak{E}^{(e)} + \frac{1}{c} \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt} \mathfrak{H}^{(e)} \right] \right), \\ \text{(b)} \quad \mathfrak{E}^{(e)} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

Nach (26) ist $\mathfrak{E} \parallel \mathbf{r} \perp d\mathbf{r}/dt$, also (b) erfüllt. (a) stellt nur noch eine Bedingung dar (für die Radialkomponente) und zwar lautet diese

$$-\frac{M\omega a}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{2a^2e^2}{\omega\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{d\sigma} [(1+\beta^2)(1-\cos\Lambda) - \Lambda \sin\Lambda] d\Lambda. \quad (27)$$

Man zeigt leicht, daß dies mit (24) gleichbedeutend ist.

§ 5. Impuls und Energie

Zur bequemen Handhabung der Kreisbewegung bedienen wir uns nun der komplexen Schreibweise. Wir definieren

$$\mathbf{x} = x_1 + i x_2 = a e^{i\lambda}; \quad \mathbf{p} = p_1 + i p_2. \quad (28)$$

Nach (16'), (5) und (21) hat man

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \frac{M\omega}{\sqrt{1-\beta^2}} \mathbf{x}' + \frac{ae^2}{c} \left\{ i e^{i\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma) e^{i\Lambda} d\Lambda - \int_{-\infty}^{\infty} d\Lambda \frac{df}{d\sigma} (1 - e^{i\Lambda}) \frac{\sigma''}{2} \int_{\lambda-\Lambda}^{\lambda} e^{i\lambda_1} d\lambda_1 \right\} \\ &= i a e^{i\lambda} \left\{ \frac{M\omega}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{e^2}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \left[f(\sigma) \cos\Lambda + \frac{df}{d\sigma} (1 - \cos\Lambda) \sigma'' \right] d\Lambda \right\}. \end{aligned}$$

Wegen (24) ist also $\mathbf{p} = p_1 = p_2 = 0$. Ferner ist, wegen $x_3' = 0$, auch $p_3 = 0$: die Bewegung (19) mit dem richtigen $a(\beta)$ repräsentiert ein makroskopisch ruhendes Teilchen.

Die Ruhmasse m lesen wir ebenfalls aus (16') ab

$$p_4 = i m c = \frac{i M c}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{i e^2}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \left[f(\sigma) + \frac{df}{d\sigma} \Lambda^2 \frac{\sigma''}{2} \right] d\Lambda$$

oder durch partielle Integration auch

$$m = \frac{M}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{e^2}{c\omega} \int_0^{\infty} f(\sigma) \left(2 - \frac{d}{d\Lambda} \Lambda^2 \frac{\sigma''}{\sigma'} \right) d\Lambda. \quad (29)$$

§ 6. Der Spin

Nach (14) ist für die Kreisbahn (19) $g_3 = 0$; also gilt nach (17) und (18) $s_3 = t_3 = \dots = 0$ und der (axiale) Spinvektor, definiert durch

$$S_3 = S_{12} \text{ usw.},$$

ist senkrecht zur Bahnebene ($S_1 = S_2 = 0$). Analog zu (28) definieren wir

$$\mathbf{s} = s_1 + i s_2, \quad \mathbf{t} = t_1 + i t_2, \dots \quad (30)$$

Damit gilt nach (12) für die 3-Komponente des Spins

$$S_3 = \frac{1}{2i} (\mathbf{x}'^* \mathbf{s} + \mathbf{x}''^* \mathbf{t} + \dots) + \text{konjug. kompl.} \quad (31)$$

Wir berechnen zunächst $\mathbf{s}, \mathbf{t}, \dots$. Aus (14), (21) und (28) entnehmen wir für

$$\mathbf{g} = g_1 + i g_2$$

die Darstellung

$$\mathbf{g}(\lambda, \Lambda) = G(\Lambda) e^{i\lambda}, \text{ wo}$$

$$G(\Lambda) = G^*(-\Lambda) = \frac{ae^2}{2c} \frac{df}{d\sigma} [(e^{i\Lambda} - 1) \sigma'' - i \sigma']. \quad (32)$$

Einsetzen in (17) ergibt

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= - \int_{-\infty}^{\infty} G(\Lambda) d\Lambda \int_{\lambda-\Lambda}^{\lambda} d\lambda_1 \int_{\lambda}^{\lambda_1} e^{i\lambda_2} d\lambda_2 \\ &= \frac{e^{i\lambda}}{i^2} \int_{-\infty}^{\infty} G(\Lambda) [e^{-i\Lambda} - (1 - i\Lambda)] d\Lambda. \end{aligned} \quad (33)$$

Analog ist nach (18)

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= - \frac{e^{i\lambda}}{i^3} \int_{-\infty}^{\infty} G(\Lambda) \\ &\cdot \left[e^{-i\Lambda} - \left(1 - i\Lambda + \frac{(-i\Lambda)^2}{2!} \right) \right] d\Lambda, \text{ usw.} \end{aligned} \quad (34)$$

Da $G(\Lambda) = G^*(-\Lambda)$, sind die in \mathbf{s}, \mathbf{t} , usw. vorkommenden Integrale reell. Der Vektor (s_1, s_2) hat also die Richtung des Ortsvektors (x_1, x_2) ; der Vektor (t_1, t_2) hat die Richtung der Geschwindigkeit (\dot{x}_1, \dot{x}_2) und so abwechselnd weiter.

Jetzt setzen wir (33) und (34) zur Berechnung des Spins in (31) ein. Dabei tritt unter dem Integral die absolut konvergente Reihe auf

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[e^z - \left(1 + z + \dots + \frac{z^n}{n!} \right) \right] = z e^z.$$

$$S_3 = \frac{Ma^2\omega}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{a^2 e^2}{c} \int_0^{\infty} f(\sigma) \left(\Lambda \sin \Lambda - 2 \cos \Lambda + \frac{d}{d\Lambda} \frac{\Lambda \sin \Lambda \sigma''}{\sigma'} \right) d\Lambda. \quad (35)$$

Er ist zeitlich konstant, wie es für das kräftefreie Teilchen sein muß.

§ 7. Der Vektor \mathfrak{T}

Dieser wurde in 2 eingeführt, hat polaren Charakter und wird von den zeitlichen Komponenten des Tensors $S_{\mu\nu}$ gebildet:

$$iT_k = S_{k4} = -\frac{ic}{\omega} s_k + x_k' s_4 + x_k'' t_4 + \dots$$

Aus (17) und (18) folgt nach kurzer Rechnung

$$s_4 = \int_{-\infty}^{\infty} g_4(\Lambda) \frac{\Lambda^2}{2!} d\Lambda; \quad t_4 = \int_{-\infty}^{\infty} g_4(\Lambda) \frac{\Lambda^3}{3!} d\Lambda, \dots$$

$g_4(\Lambda)$ ist ungerade, also $s_4 = 0$. Damit läßt sich $\mathfrak{T} = (T_1, T_2, T_3)$ berechnen. Benutzung von (24') und (29) ergibt exakt

$$\mathfrak{T} = -mc \mathfrak{x}, \quad (36)$$

wo $\mathfrak{x} = (x_1, x_2, x_3)$ den Ortsvektor bedeutet.

Dieses Resultat läßt sich einfacher wie folgt gewinnen. Für das kräftefreie Teilchen ist der Momententensor $M_{\mu\nu}$ zeitlich konstant, daher speziell

$$M_{k4} = x_k p_4 - x_4 p_k + S_{k4} \\ = i(mc x_k + T_k) = \text{const.}$$

Aus Isotropiegründen muß $\text{const} = 0$ sein und damit hat man (36).

Für das in 2 eingeführte elektrische Moment gilt also

$$\vec{\mu}_{\text{elektrisch}} = \frac{e}{mc} \mathfrak{T} = -e \mathfrak{x}.$$

Das negative Vorzeichen ist merkwürdig (Elektronenladung $e = -|e|$). Jedenfalls ist aber das elektrische Moment periodisch veränderlich. Es verschwindet im Zeitmittel, im Gegensatz zu dem zeitlich konstanten magnetischen Moment $^2 \vec{\mu}_{\text{magnetisch}} = (e/mc) \mathfrak{S}$, wo \mathfrak{S} der Spinvektor ist.

Diese benutzend, findet man ohne weiteres

$$S_3 = a \int_{-\infty}^{\infty} G(\Lambda) [1 - (1 + i\Lambda) e^{-i\Lambda}] d\Lambda.$$

Mit dem Wert von G aus (32), durch eine partielle Integration und Verwertung von (24') erhalten wir für den Spin

§ 8. Das von dem Teilchen erzeugte Feld

Dieses Feld leitet sich, vgl. (5), aus dem Viererpotential ab

$$A_{\mu}^{(e)} = e \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma) d\bar{x}_{\mu} \quad \text{mit} \quad \sigma = -\Sigma (x_{\nu} - \bar{x}_{\nu})^2.$$

Wir haben dabei jetzt den Aufpunkt mit x , den auf der Weltlinie gelegenen Integrationspunkt mit \bar{x} bezeichnet. Wir setzen für den Aufpunkt

$$x_1 = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad x_3 = r \cos \vartheta, \\ x_4 = \frac{ic}{\omega} \lambda$$

und für den Bahnpunkt

$$\bar{x}_1 = a \cos \bar{\lambda}, \quad \bar{x}_2 = a \sin \bar{\lambda}, \quad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_4 = \frac{ic}{\omega} \bar{\lambda}.$$

Mit der Abkürzung $\Lambda = \bar{\lambda} - \varphi$ wird

$$\sigma = \left(\frac{c}{\omega} \right)^2 (\Lambda + \varphi - \lambda)^2 - (r^2 + a^2 - 2ra \sin \vartheta \cos \Lambda) \quad (37)$$

und somit

$$A^{(e)} = A_1^{(e)} + iA_2^{(e)} = ae \cdot ie^{i\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma) e^{i\Lambda} d\Lambda, \quad A_3^{(e)} = 0, \quad (38)$$

$$A_4^{(e)} = i\Phi^{(e)} = \frac{ie}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma) d\Lambda. \quad (39)$$

$\Phi^{(e)}$ ist das skalare Potential. Natürlich ist $A_{\mu}^{(e)}(\lambda) = A_{\mu}^{(e)}(\lambda + 2\pi)$ zeitlich periodisch.

Zunächst sollen die Integrale über Λ in (38) und (39) in solche über σ verwandelt werden. Nach (37) ist $\sigma = \sigma(\Lambda, \lambda)$. Die Umkehrfunktion $\Lambda = \Lambda(\sigma, \lambda)$ ist zweideutig, wenn r hinreichend groß ist [nämlich $r > a/(1 - \beta)$]; wir wollen von $\Lambda_{\text{retardiert}}$ und $\Lambda_{\text{avanciert}}$ sprechen, was natürlich nicht bedeutet, daß wir uns auf die Maxwellsche Theorie beschränken. Ferner sei r so groß vorausgesetzt, daß $f(-r^2) \approx f(-\infty) = 0$.

Dann wird

$$\mathbf{A}^{(e)} = a e \cdot i e^{i\varphi} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma) \left(\frac{e^{i\lambda}}{\partial \sigma / \partial \lambda} \right)_{\text{ret.}} d\sigma + \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma) \left(\frac{e^{i\lambda}}{\partial \sigma / \partial \lambda} \right)_{\text{av.}} d\sigma \right\}. \quad (40)$$

Für A_4 gilt Analoges.

Wir betrachten von nun ab nur noch das Zeitmittel

$$\bar{A}_\mu^{(e)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A_\mu^{(e)} d\lambda.$$

Bei Mittelung von (40) treten die Integrale auf

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\lambda} d\lambda}{[(\partial \sigma / \partial \lambda) (\partial \lambda / \partial \sigma)]_{\text{ret.}, \text{av.}}}.$$

Es ist aber $(\partial \sigma / \partial \lambda)_\lambda (\partial \lambda / \partial \sigma)_\sigma = -(\partial \sigma / \partial \lambda)_\lambda$ und aus (37) ist zu entnehmen

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \lambda} \right)_{\text{ret.}} = - \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \lambda} \right)_{\text{av.}} = \frac{2c}{\omega} (\sigma + r^2 + a^2 - 2ra \sin \vartheta \cos \lambda)^{1/2} (> 0). \quad (41)$$

Damit wird nach (40), weil retardierter und avancierter Beitrag gleich sind,

$$\bar{\mathbf{A}}^{(e)} = \frac{e\beta}{r} \cdot i e^{i\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma) \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\lambda} d\lambda \right] d\sigma; \quad \bar{A}_3^{(e)} = 0. \quad (42)$$

Analog folgt aus (39)

$$\bar{\Phi}^{(e)} = \frac{e}{r} \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma) \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varrho d\lambda \right] d\sigma. \quad (43)$$

Dabei wurde abgekürzt

$$\varrho = \left(1 + \frac{\sigma + a^2 - 2ra \sin \vartheta \cos \lambda}{r^2} \right)^{-1/2}. \quad (44)$$

Entwickeln der Quadratwurzel in (44) nach Potenzen von $1/r$ und Einsetzen in (43) ergibt für das zeitgemittelte elektrische Potential

$$\bar{\Phi}^{(e)} = \frac{e}{r} \left\{ 1 - \frac{1}{2r^2} \left[a^2 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \vartheta \right) + \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma) \sigma d\sigma \right] \right\} + ((r^{-5})). \quad (45)$$

Dabei wurde die Normierungsbedingung (4) benutzt. Die Glieder ohne $f(\sigma)$ stellen angenähert das Maxwellsche Potential eines Kreisstroms dar (Coulomb-Potential, ergänzt durch das Quadrupolglied); das Glied mit $f(\sigma)$ bedeutet die Abweichung vom Coulomb-Gesetz infolge der verallgemeinerten Theorie. Wenn $a = 0$, ist übrigens nach (37)

$$d\lambda = \frac{\omega}{2c} (\sigma + r^2)^{-1/2} d\sigma,$$

und es kommt aus (39) streng

$$\Phi^{(e)} = e \int_{-r^2}^{\infty} \frac{f(\sigma) d\sigma}{\sqrt{r^2 + \sigma}},$$

ein bekanntes Ergebnis von Bopp⁴.

Für das zeitgemittelte Vektorpotential folgt aus (42)

$$\bar{\mathbf{A}}^{(e)} = \frac{ae\beta \sin \vartheta}{2r^2} (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) + ((r^{-4})). \quad (46)$$

Die Strukturfunktion $f(\sigma)$ geht in die angeschriebene erste Näherung nicht ein, das Vektorpotential (46) ist das Maxwellsche, hervorgerufen von dem magnetischen Dipolmoment $ae\beta/2 = \pi a^2 J/c$ eines Kreisstroms ($J = \text{Stromstärke}$). Das durch das erzeugte Feld definierte magnetische Moment stimmt also nicht mit dem in ² erhaltenen, energetisch definierten überein. Das Verhältnis beider Definitionen bedarf noch der Klärung*.

⁴ F. Bopp, Ann. Physik **42**, 573 [1943], § 2.

* Anm. b. d. Korr. Die in ² vertretene formale Auslegung der dortigen Gl. (13), daß nämlich aus ihr generell der g -Faktor 2 für das feldmechanische Teilchen herauszulesen sei, möchte ich nicht aufrechterhalten. Um aus der klassischen Theorie etwas über das magnetische Moment zu erfahren, hätte man

adiabatische Vorgänge zu betrachten. Das magnetische Moment, meßbar durch Stern-Gerlach-Versuch oder Zeeman-Effekt, erfordert ja eigentlich zu seiner Definition den Begriff des Quantenzustands. Tatsächlich gibt die kanonische Quantisierung der Feldmechanik eine klare Auskunft über das magnetische Moment, führt aber keineswegs generell zum g -Faktor 2.

III. Spezialisierung der Strukturfunktion

§ 9. Die spezielle Strukturfunktion

Um die in II erhaltenen Ergebnisse für Bahnradius, Masse und Spin auf ihren physikalischen Inhalt zu prüfen, betrachten wir eine spezielle Strukturfunktion. Wir wählen — aus Gründen der mathematischen Einfachheit — die Rechtecksfunktion

$$f(\sigma) = \frac{1}{b^2} \text{ für } 0 < \sigma < b^2; f(\sigma) = 0 \text{ sonst.} \quad (47)$$

Die Normierungsbedingung (4) ist erfüllt.

Die in der Gleichgewichtsbedingung (24') und den Ausdrücken (29) und (35) für Masse und Spin vorgeschriebenen Integrationen sind also zu erstrecken bis zu einem Wert von Λ , der nach (21) der Bedingung

$$b^2 = \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 [\Lambda^2 - 2\beta^2 (1 - \cos \Lambda)] \quad (48)$$

genügt. Solche Λ -Werte sind fortan — ohne besondere Kennzeichnung — immer gemeint. Anschaulich bedeutet 2Λ den Kreisbogen der Bahn, der zur Selbstkraft, Energie usw. beiträgt.

Wir lesen (48) gleich noch auf andere Weise, indem wir durch $a\omega = \beta c$ den *Bahnradius* a statt der Frequenz ω einführen:

$$a = b\beta [\Lambda^2 - 2\beta^2 (1 - \cos \Lambda)]^{-1/2}. \quad (49)$$

β denken wir uns künftig vorgegeben, Λ aber ist durch die Gleichgewichtsbedingung festgelegt, die wir nun behandeln.

Nach (24') und (21) lautet diese für die Struktur (47)

$$\frac{M\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{2e^2 a}{c^2 b^2} \cdot \left[\sin \Lambda - \frac{(1 - \cos \Lambda)(1 - \beta^2 \cos \Lambda)}{\Lambda - \beta^2 \sin \Lambda} \right] = 0. \quad (50)$$

Wir kürzen ab

$$N = [\Lambda^2 - 2\beta^2 (1 - \cos \Lambda)]^{1/2} (\Lambda - \beta^2 \sin \Lambda),$$

$$F(\Lambda, \beta) = \frac{2\sqrt{1-\beta^2}}{N} [(1 + \beta^2)(1 - \cos \Lambda) - \Lambda \sin \Lambda] \quad (51)$$

und führen das dimensionslose Maß

$$\mu = \frac{Mc^2}{e^2/b} \quad (52)$$

für die nichtelektromagnetische Masse ein. Damit schreibt sich die *Gleichgewichtsbedingung* nun

$$\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} [F(\Lambda, \beta) - \mu] = 0. \quad (53)$$

Sie bestimmt, bei gegebenem μ und β , die Λ -Werte der möglichen Bahnen.

Für die *Masse* entnimmt man aus (29) und (21), $a\omega = \beta c$ benutzend,

$$m = \frac{M}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{e^2}{bc^2} \frac{a}{b\beta} \left[2\Lambda - \frac{\Lambda^2 (1 - \beta^2 \cos \Lambda)}{\Lambda - \beta^2 \sin \Lambda} \right]. \quad (54)$$

Indem man mittels (50) daraus M eliminiert und (49) sowie die Abkürzung (51) verwendet, kommt

$$m = \frac{e^2}{bc^2} \cdot \frac{2}{N} \left[\frac{\Lambda^2}{2} + 1 - \cos \Lambda - \Lambda \sin \Lambda + \beta^2 \left(\frac{\Lambda^2}{2} \cos \Lambda + 1 - \cos \Lambda - \Lambda \sin \Lambda \right) \right]. \quad (54')$$

Für den *Spin* folgt aus (35) und (21) — den die Raumrichtung bezeichnenden Index 3 lassen wir künftig weg —

$$S = \frac{Mc}{\sqrt{1-\beta^2}} a\beta + \frac{a^2 e^2}{c} \cdot \frac{1}{b^2} \left[\Lambda \cos \Lambda + \sin \Lambda - \frac{\Lambda \sin \Lambda (1 - \beta^2 \cos \Lambda)}{\Lambda - \beta^2 \sin \Lambda} \right]. \quad (55)$$

Indem man wieder mittels (50) M eliminiert und (51) benutzt, kommt

$$S = \frac{e^2}{c} \cdot \frac{2\beta^2}{N} \left[\Lambda^2 - 2\beta^2 (1 - \cos \Lambda) \right]^{-1/2} \left[\frac{\Lambda^2}{2} \cos \Lambda + 1 - \cos \Lambda - \Lambda \sin \Lambda + \beta^2 \left(1 - \cos \Lambda - \frac{1}{2} \sin^2 \Lambda \right) \right]. \quad (55')$$

§ 10. Fallunterscheidung hinsichtlich der nichtelektromagnetischen Masse

Die Gleichgewichtsbedingung (53) hat stets die Lösung $\beta = 0$ (keine Zitterbewegung). Um die anderen, durch bestimmte Werte $\Lambda(\beta, \mu)$ gekennzeichneten Zustände zu finden, verschaffen wir uns zunächst einen Überblick über den Verlauf der Funktion $F(\Lambda, \beta)$, definiert durch (51). Es gelten die Näherungen

$$\begin{aligned} \Lambda \gg 1: F &\approx -2\sqrt{1-\beta^2} \sin \Lambda / \Lambda, \\ \Lambda \ll 1: F &\approx -[1 - (3 - \beta^2)\xi]/(1 + \beta^2\xi)^{1/2}(1 + 2\beta^2\xi), \\ &\text{wo } \xi = \frac{\Lambda^2}{12(1 - \beta^2)}. \end{aligned} \quad (56)$$

Es ist ferner

$$\begin{aligned} F = 0 \quad &\text{für } \Lambda = 0, \Lambda_1, 2\pi, \text{ ca } 3\pi \text{ etc.,} \\ &\text{wo } \Lambda_1(\beta = 0, \mu = 0) = 0,73\pi; \\ \Lambda_1(\beta \approx 1, \mu = 0) &\approx \sqrt{12(1 - \beta)}. \end{aligned} \quad (57)$$

Für $\beta = 1$, $\Lambda \neq 0$ folgt aus (51), daß $F = 0$ ist. Das Verhalten von F für $\beta \rightarrow 1$, $\Lambda \rightarrow 0$ ist aus (56) zu entnehmen. Man überzeugt sich leicht, daß F als Funktion von ξ ein Maximum durchläuft

$$F = F_{\max} = 0,36 \quad \text{für } \xi = \xi^* = 2,80, \text{ wenn } \beta \rightarrow 1. \quad (58)$$

F hat also für $\beta \rightarrow 1$, $\Lambda \rightarrow 0$ einen nadelförmigen Verlauf. Abb. 1 vermittelt ein Gesamtbild von $F(\Lambda, \beta)$.

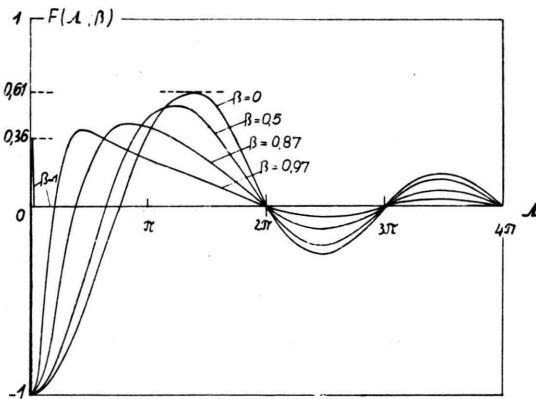


Abb. 1. Verlauf der das mechanische Gleichgewicht (53) bestimmenden Funktion F aus (51).

Es sind demnach die vier Fälle zu unterscheiden:

a) Kleine positive nichtelektromagnetische Masse, $0 < \mu < 0,36$.

Nach Abb. 1 gibt es zu jedem $0 < \beta < 1$ endlich viele Lösungen $\Lambda(\beta, \mu)$ der Gleichgewichtsbedin-

gung (53). Diese Lösungen, nach wachsenden Λ geordnet, gehören paarweise zusammen: $\Lambda_{1,2}$; $\Lambda_{3,4}$ usw. Für $\beta \rightarrow 1$, d. h. Zitterbewegung fast mit Lichtgeschwindigkeit, gibt es, wenn $\mu \neq 0$, nur noch die Lösungen Λ_1 und Λ_2 ; diese bestimmen sich nach (53) und (56) aus

$$F \approx -(1 - 2\xi)/\sqrt{1 + \xi}(1 + 2\xi) = \mu \quad (59)$$

Für $\mu \ll 1$ ergibt sich näherungsweise

$$\xi_1 \approx \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{2}}\mu; \quad \xi_2 \approx \frac{1}{\mu^2} - 3,$$

d. h. nach der Bedeutung von ξ , vgl. (56),

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &\approx \sqrt{12(1 - \beta)} \left(1 + \sqrt{\frac{3}{2}}\mu\right), \\ \Lambda_2 &\approx \sqrt{24(1 - \beta)} \frac{1}{\mu} \left(1 - \frac{3}{2}\mu^2\right), \end{aligned} \quad (60)$$

wobei

$$\beta \rightarrow 1, \mu \ll 1.$$

Als Beispiel ist in Abb. 2a der Fall $\mu = 0,1$ skizziert. Im Sonderfall $\mu = 0$ gibt es zu jedem β die unendlich vielen Lösungen Λ_1, \dots , welche in (57) aufgeführt sind.

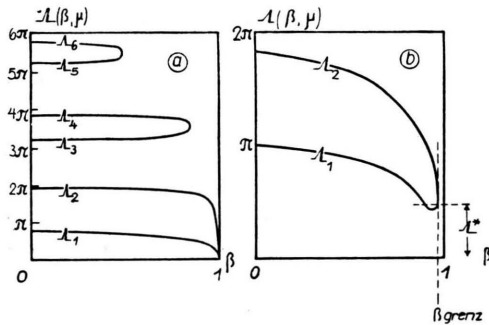


Abb. 2. Die durch die Gleichgewichtsbedingung (53) festgelegten Kreisbögen Λ in Abhängigkeit von $\beta = v/c$ (v Umlaufgeschwindigkeit) a) $\mu = 0,1$ ($\mu = Mc^2/(e^2/b)$ M nichtelektromagnetische Masse, b die in der Strukturfunktion (47) enthaltene Länge) b) $\mu = 0,4$.

b) Mittlere nichtelektromagnetische Masse, $0,36 < \mu < 0,61$.

Nach Abb. 1 hat (53) hier nur die Lösungen $\Lambda_{1,2}$ und auch diese existieren nur für $\beta \leq \beta_{\text{grenz}}$, wo $\beta_{\text{grenz}} = 1$ bzw. 0 ist für $\mu = 0,36$ bzw. 0,61. Wir betrachten näher den Fall

$$\mu = 0,36(1 + \nu), \quad \text{wo } 0 < \nu \ll 1, 1 - \beta \ll 1. \quad (61)$$

Dann ist, vgl. (58), $\xi \approx \xi^* = 2,80$ und die Entwicklung von F aus (56) nach Potenzen von $1 - \beta$ ergibt als Gleichgewichtsbedingung

$$F \approx [(2\xi - 1)/\sqrt{\xi + 1} (2\xi + 1)] [1 + 3,65 (1 - \beta)] \\ = 0,36 (1 + \nu). \quad (62)$$

Da die erste Klammer, vgl. (58), maximal = 0,36 ist, existieren Lösungen nur, wenn

$$\beta \leq \beta_{\text{grenz}} = 1 - \frac{\nu}{3,65}. \quad (63)$$

Hier gibt es also Zitterbewegung nur unterhalb der Lichtgeschwindigkeit. Wenn $\beta = \beta_{\text{grenz}}$, hat man nur die einzige Lösung $\xi^* = 2,80$, zu ihr gehört, vgl. (56),

$$A^* = 4,30 \sqrt{\nu}. \quad (64)$$

Um noch das Verhalten in der Nähe von β_{grenz} zu erkennen, entwickeln wir in (62) nach Potenzen von $\xi - \xi^*$ und bekommen statt (62)

$$0,011 (\xi - 2,80)^2 = 0,36 [3,65 (1 - \beta) - \nu].$$

Diese Gleichung hat zwei Lösungen $\xi_{(1)}$ und für die zugehörigen A -Werte findet man

$$A_{(1)} = 8,2 \sqrt{1 - \beta} (1 \mp \sqrt{3,65 (1 - \beta) - \nu}). \quad (65)$$

Als Beispiel ist in Abb. 2 b der Fall $\nu = 0,1$, d. h. $\mu = 0,4$ und $\beta_{\text{grenz}} = 0,973$, skizziert.

c) Große nichtelektromagnetische Masse, $\mu > 0,61$.

Nach Abb. 1 hat hier die Gleichung $F = \mu$ keine Lösung, die Gleichgewichtsbedingung (53) wird nur durch $\beta = 0$ erfüllt. Das elektromagnetische Feld kann also in diesem Fall keine kreisförmige Zitterbewegung aufrechterhalten.

d) Negative nichtelektromagnetische Masse, $-1 < \mu < 0$.

Nach Abb. 1 hat $F = \mu$ nur eine einzige Lösung A . Ist speziell $\mu = -1 + \nu'$, wo $0 < \nu' \ll 1$, so ist dieses $A \ll 1$, man kann F nach Potenzen von A entwickeln und bei A^2 abbrechen. Nach (56) lautet in diesem Spezialfall die Gleichgewichtsbedingung (53)

$$-1 + 3 \left(1 + \frac{\beta^2}{2}\right) \xi = -1 + \nu',$$

$$\text{d. h.} \quad A = 2 \sqrt{\frac{1 - \beta^2}{1 + \beta^2/2}} \sqrt{\nu'}. \quad (66)$$

In diesem Fall hätte man gleich von vornherein in der Lagrange-Funktion höhere als zweite Zeitableitungen streichen können; es ist dies der Grenzfall des Hönlschen Pol-Dipolteilchens.

§ 11. Bahnradius, Masse, Spin

Wir behandeln die in § 10 unterschiedenen Fälle a)–d) wieder gesondert.

Fall a)

Als *Bahnradius* (49) ergibt sich

$$a = b\beta/\Lambda \text{ für } \beta \approx 0. \quad (67)$$

Falls $\beta \rightarrow 1$, $\Lambda \rightarrow 0$ geht, gilt, wegen ξ vgl. (56),

$$a \approx b/\Lambda \sqrt{2(1 - \beta)(1 + \xi)}. \quad (68)$$

Somit ist für die Zustände $A_{1,2}$ aus (60)

$$a_1 \approx \frac{b}{6(1 - \beta)} \left(1 - \frac{4}{\sqrt{6}} \mu\right), \quad (68')$$

$$a_2 \approx \frac{b}{4\sqrt{3}(1 - \beta)} \mu^2 \left(1 + \frac{5}{2} \mu^2\right) \text{ für } \beta \rightarrow 1, \mu \ll 1.$$

In Abb. 3 a sind die Bahnradien skizziert für $\mu = 0,1$.

Als *Masse* (54) finden wir, (67) benutzend,

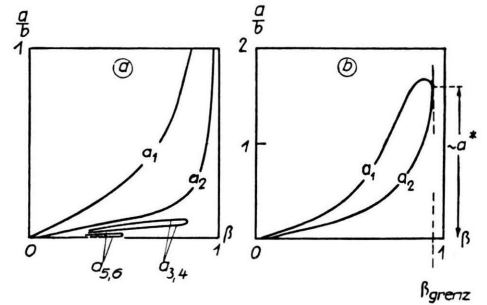


Abb. 3. Bahnradien a , die zu den A -Werten aus Abb. 2 gehören a) $\mu = 0,1$ b) $\mu = 0,4$.

$$m = M + \frac{e^2}{b c^2} = \frac{e^2}{b} (\mu + 1) \text{ für } \beta = 0. \quad (69)$$

Falls $\beta \rightarrow 1$, $\Lambda \rightarrow 0$ geht, folgt aus (54')

$$m = \frac{e^2}{b c^2} \frac{\Lambda^2}{4} \left(1 + \frac{2}{3} \xi\right) \sqrt{2(1 - \beta)(1 + \xi)(1 + 2\xi)}. \quad (70)$$

Somit ist für die Zustände $A_{1,2}$ aus (60)

$$m_1 \approx \frac{e^2}{b c^2} \sqrt{\frac{4}{3}(1 - \beta)} \left(1 + \frac{7\sqrt{6}}{12} \mu\right); \quad (70')$$

$$m_2 \approx \frac{e^2}{b c^2} \frac{\sqrt{2(1 - \beta)}}{\mu} (1 - \mu^2) \text{ für } \beta \rightarrow 1, \mu \ll 1.$$

In Abb. 4 a sind die Massen für $\mu = 0,1$ skizziert.

Für den *Spin* (55') ergibt sich

$$S \approx \frac{e^2}{c} \frac{\beta^2}{\Lambda} \left(\cos \Lambda + \frac{1 - \cos \Lambda - \Lambda \sin \Lambda}{\Lambda^2/2}\right) \text{ für } \beta \approx 0. \quad (71)$$

Der Klammerausdruck ist positiv für die Lösungen $\Lambda_{2, 4, \dots}$, negativ für $\Lambda_{1, 3, \dots}$. Positives S bedeutet einen Drehimpuls in der gewöhnlichen Richtung bezüglich des Umlaufsinn der Bahnbewegung. Falls $\beta \rightarrow 1$, $\Lambda \rightarrow 0$ geht, findet man

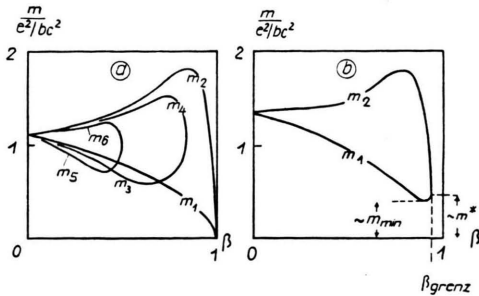


Abb. 4. Massen m , sonstiges wie bei Abb. 3.

$$S \approx -\frac{e^2}{c} \Lambda \left(1 + \frac{2}{3} \xi\right) / 2(1-\beta)(1+\xi)(1+2\xi). \quad (72)$$

Somit ist für die Zustände $\Lambda_{1, 2}$ aus (60)

$$S_1 \approx -\frac{e^2}{c} \frac{1}{\sqrt{27}(1-\beta)} \left(1 - \frac{\mu}{\sqrt{24}}\right), \quad (72')$$

$$S_2 \approx -\frac{e^2}{c} \frac{\mu}{\sqrt{24}(1-\beta)} \left(1 + \frac{3}{2} \mu^2\right) \text{ für } \beta \rightarrow 1, \mu \ll 1.$$

In Abb. 5a sind die Spinwerte für $\mu = 0,1$ skizziert. Es ist zu bemerken, daß der Spin stets sehr klein ist ($\leq e^2/c = \hbar/137$), außer für die durch $\Lambda_{1, 2}$ gekennzeichneten Zustände im Fall $\beta \rightarrow 1$.

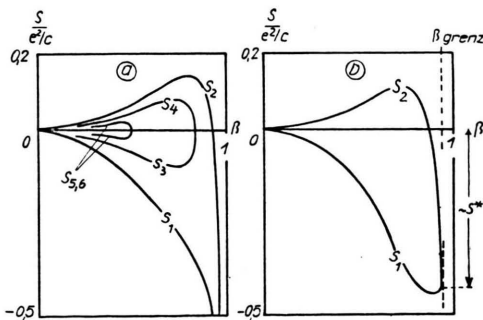


Abb. 5. Spins S (senkrecht zur Bahnebene), sonstiges wie bei Abb. 3.

Wir bemerken ferner, daß gemäß (68), (70) und (72) gilt

$$S_{1, 2} \approx -(mca)_{1, 2} \text{ für } \beta \rightarrow 1, \mu \ll 1. \quad (73)$$

Diese Beziehung findet sich schon bei Hönl⁵ für den Fall des Pol-Dipolteilchens.

⁵ H. Hönl u. A. Papapetrou, Z. Physik **112**, 512 [1939], Gl. (91).

Fall b)

Wir beschränken uns wieder auf den Grenzfall (61). Einsetzen der Werte $\Lambda_{1, 2}$ aus (65) in (68) liefert, nach konsequenter Entwicklung, als *Bahnradius*

$$a_{(1)} \approx \frac{b}{22,6(1-\beta)} (1 \pm 1,74 \sqrt{3,65(1-\beta)-v}), \quad \text{wo } 0 < v \ll 1, 1-\beta \ll 1. \quad (74)$$

Zum Wert β_{grenz} aus (63) gehört also

$$a^* = 0,16 \frac{b}{v}. \quad (75)$$

In Abb. 3b ist der Fall $v = 0,1$, d. h. $\mu = 0,4$ skizziert.

In analoger Weise folgt aus (65) und (70) für die *Masse*

$$m_{(1)} = \frac{e^2}{b c^2} \cdot 2,65 \sqrt{1-\beta} (1 \mp 0,88 \sqrt{3,65(1-\beta)-v}). \quad (76)$$

Zu β_{grenz} aus (63) gehört

$$m^* = \frac{e^2}{b c^2} \cdot 1,38 \sqrt{v}. \quad (77)$$

m_1 hat als Funktion von β ein Minimum; die Rechnung ergibt

$$m_1 = m_{1, \text{Min.}} = m^* (1 - 0,38 v) \quad \text{für } \beta = \beta_{\text{grenz}} - 0,77 v. \quad (78)$$

In Abb. 4b ist der Fall $v = 0,1$ skizziert.

Schließlich ergibt sich aus (65) und (72) für den *Spin*

$$S_{(1)} = -\frac{e^2}{c} \cdot \frac{0,070}{\sqrt{1-\beta}} (1 \pm 1,86 \sqrt{3,65(1-\beta)-v}). \quad (79)$$

Zu β_{grenz} aus (63) gehört

$$S^* = -\frac{e^2}{c} \cdot \frac{0,134}{\sqrt{v}} \quad (80)$$

und zu dem Zustand (78) minimaler Masse gehört der Spin

$$S_{\text{Massenmin.}} = S^* (1 + 1,26 v). \quad (81)$$

Das Analogon zur Beziehung (73) lautet

$$S^* = -0,61 (mca)^*.$$

In Abb. 5b ist wieder der Fall $v = 0,1$ skizziert.

Fall d)

Es sei wieder speziell $\mu = -1 + v'$, $0 < v' \ll 1$ (Pol-Dipolteilchen). Als *Bahnradius* (49) ergibt sich zufolge (66)

$$a = b\beta \sqrt{1+\beta^2/2} / 2(1-\beta^2) \sqrt{v'}. \quad (82)$$

Als *Masse* (54) findet man

$$m = \frac{e^2}{b c^2} v' \sqrt{1 - \beta^2} \left/ \left(1 + \frac{\beta^2}{2} \right) \right., \quad (83)$$

als *Spin* (55)

$$S = - \frac{e^2}{c} \beta^2 \sqrt{v'/2} \sqrt{(1 - \beta^2)(1 + \beta^2/2)}. \quad (84)$$

Hier gilt für alle β die Hönlische Beziehung

$$S = - m c \beta a. \quad (85)$$

§ 12. Diskussion

Bei den bisherigen Anwendungen der Feldmechanik¹, so auch kürzlich in der Arbeit von Groschwitz⁶, wurde nicht eigentlich das Wirkungsprinzip (1) verwertet, sondern die Lagrange-Funktion L_0 aus (2) entwickelt und nach den Gliedern x'' abgebrochen. Das bedeutet, daß nur wenige zusätzliche Freiheitsgrade der Partikel betrachtet werden. Im Fall der Kreisbewegung lautet die Bedingung für die Zulässigkeit dieser Näherung offenbar, daß der zur elektromagnetischen Selbstkraft usw. wesentlich beitragende Kreisbogen $\Delta \ll 1$ ist; für unsere spezielle Struktur (47) ist sie also bei verschwindender nichtelektromagnetischer Masse ($\mu = 0$) nur erfüllt im Grenzfall $\beta \rightarrow 1$ und auch nur für den durch Δ_1 charakterisierten Zustand aus (60). Tatsächlich stimmen in diesem Fall unsere Ergebnisse (70') und (72') für Masse und Spin mit denen von Groschwitz überein, bis auf unwesentliche Zahlenfaktoren wegen etwas anderer Strukturfunktion. Zum Vergleich muß man lediglich mittels (68') $1 - \beta$ durch a_1 ausdrücken und in (70'), (72') einsetzen, denn Groschwitz hat die mechanische Gleichgewichtsbedingung, die zu (68') führt, nicht aufgestellt⁷. Unsere Methode ist von den Einschränkungen, welche die erwähnte Näherung mit sich bringt, frei; sie erlaubt Aussagen über alle Zittergeschwindigkeiten $0 < \beta < 1$ und läßt die große Mannigfaltigkeit der nach (1) möglichen Kreisbewegungen erkennen.

Am größten ist, wie sich im § 10 zeigte, diese Mannigfaltigkeit, wenn die nichtelektromagnetische Masse verschwindet. Dann und auch noch, wenn letztere genügend klein ist ($0 < \mu < 0,36$), bewegt sich aber die Partikel im energetisch tiefsten

Zustand mit Lichtgeschwindigkeit und hat verschwindende Masse (vgl. Abb. 4a). Das Teilchen zeigt die Erscheinung der Masseninstabilität⁸. Die Kreisbahn kann aber einem Energieminimum entsprechen, wenn man das Teilchen so stark mit nichtelektromagnetischer Masse beschwert, daß $\mu > 0,36$ wird (vgl. Abb. 4b). Man kann die verfügbaren Konstanten so einrichten, daß dieser Zustand das Elektron darstellt im Sinn der Hönlischen Analogien zwischen der Feldmechanik und der Quantenmechanik des Elektrons. Dazu muß nach (78) und (77) sein

$$m_{1, \text{Min.}} \approx m^* = \frac{e^2}{b c^2} \cdot 1,38 \sqrt{v} = m_{\text{El.}},$$

ferner nach (81)

$$|S| \approx |S^*| = \frac{e^2}{c} \cdot \frac{0,134}{\sqrt{v}} = \frac{\hbar}{2}.$$

Die in der klassischen Feldmechanik auftretende Einheit e^2/c des Drehimpulses ist klein ($\hbar/137$). Daher ergibt sich für v der kleine Wert $4 \cdot 10^{-6}$. Damit wird dann $e^2/b c^2 = 360 m_{\text{El.}}$; $M = \mu \cdot e^2/b c^2 = 130 m_{\text{El.}}$. Das Teilchen hätte also ohne Zitterbewegung die Masse $490 m_{\text{El.}}$, im Energieminimum $1 m_{\text{El.}}$ und den Drehimpuls $\hbar/2$. In diesem Grundzustand hätte es nach (75) den Radius $0,80 \hbar/m_{\text{El.}} c$.

Die Frage, ob damit ein massenstabiles, im energetisch tiefsten Zustand spinbegabtes Teilchen konstruiert sei, ob man also in diesem Sinne den Spin als elektromagnetische Erscheinung auffassen kann, ist jedoch trotzdem offen. Denn wir haben nur Kreisbahnen betrachtet und es ist wohl anzunehmen, daß es z. B. Pendelbahnen, also spinlose Zustände, gibt mit einer Masse, die geringer ist als die Minimalmasse der Kreisbahn. Überdies muß für die Massenstabilität nicht nur minimale Energie gefordert, sondern auch die Strahlungskraft in Betracht gezogen werden. Diese verändert aber die Mechanik grundlegend und es tauchen erhebliche Schwierigkeiten auf⁹. Als Ergebnis unserer Betrachtungen könnte man geneigt sein, die Konstruktion von Elementarteilchen mittels der Feldmechanik zurückzustellen und eine andere physikalische Verwertung der letzteren anzustreben. Tatsächlich scheint ein solcher, bereits unternommener Versuch aussichtsreich zu sein¹⁰.

⁶ E. Groschwitz, Z. Naturforschg. **7a**, 458 [1952].

⁷ Dadurch ist in der Arbeit von Groschwitz eine unzutreffende Aussage über den Grenzfall $\beta \rightarrow 1$ entstanden. Tatsächlich strebt der Teilchenradius $\rightarrow \infty$ wie $1/(1 - \beta)$ — sonst wäre die Gleichgewichtsbedingung verletzt — und daher geht die Ruhenergie des Teil-

chens $\rightarrow 0$ wie $\sqrt{1 - \beta}$ (keine nichtelektromagnetische Masse!).

⁸ Vgl. S. 363 f. des Artikels¹.

⁹ H. Steinwedel, Z. Naturforschg. **7a**, 205 [1952].

¹⁰ L. Waldmann, Z. Naturforschg. **8a**, 329 [1953].